Correction : 52 p. 212

a) On a : $F(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 1$.

D'où : $F'(x) = 3x^2 - 6x - 24$

$= 3(x^2 - 2x - 8)$

Or : $3(x + 2)(x - 4) = 3(x^2 - 4x + 2x - 8)$

$= 3(x^2 - 2x - 8)$

Donc : $F'(x) = 3(x + 2)(x - 4)$

Une primitive de la fonction f définie par $f(x) = 3(x + 2)(x - 4)$ est la fonction F définie par $F(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 1$.

b) On a : $F(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

D'où : $F'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

Or : $3(x - 1)^2 - 1 = 3(x^2 - 2x + 1) - 1$

$= 3x^2 - 6x + 3 - 1$

$= 3x^2 - 6x + 2$

Donc : $F'(x) = 3(x - 1)^2 - 1$

Une primitive de la fonction f définie par $f(x) = 3(x - 1)^2 - 1$ est la fonction F définie par $F(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

c) On a : $F(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1$.

D'où : $F'(x) = 3x^2 - 2x + 2$

Une primitive de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ est la fonction F définie par $F(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1$.

Correction : 54 p. 212

a) On pose : $u(x) = x + 1$, soit $u'(x) = 1$.

Donc : $F = \ln u + \frac{1}{u}$, soit $F' = \frac{u'}{u} - \frac{u'}{u^2}$.

Pour tout réel $x \geq 0$, on a : $F'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{x+1-1}{(x+1)^2}$

$= \frac{x+1-1}{(x+1)^2}$

$= \frac{x}{(x+1)^2} = f(x)$

F est donc bien une primitive de f.

b) On pose : w(x) = 5x + 5, u(x) = x + 2 et v(x) = x + 1, soit w'(x) = 5, u'(x) = 1 et v'(x) = 1.

Donc : $G = \ln w + \frac{u}{v}$, soit $G' = \frac{w'}{w} + \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Pour tout réel x ≥ 0, on a : $G'(x) = \frac{5}{5x+5} + \frac{1(x+1)-1(x+2)}{(x+1)^2}$

$= \frac{5}{5(x+1)} + \frac{x+1-x-2}{(x+1)^2}$

$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{x+1-1}{(x+1)^2}$

$= \frac{x+1-1}{(x+1)^2}$

$= \frac{x}{(x+1)^2} = f(x)$

G est donc bien une primitive de f.

c) F et G sont deux primitives de f.

Donc, il existe un réel k tel que : F = G + k.

On a alors : $F(e-1) = G(e-1) + k$

$F(e-1) = G(e-1) + k$

$\ln(e-1+1) + \frac{1}{e-1+1} = \ln[5(e-1+1)] + \frac{e-1+2}{e-1+1} + k$

$\ln(e) + \frac{1}{e} = \ln(5e) + \frac{e+1}{e} + k$

$1 + e^{-1} = \ln(5) + \ln(e) + 1 + \frac{1}{e} + k$

$1 + e^{-1} = \ln(5) + 1 + 1 + e^{-1} + k$

$k = 1 + e^{-1} - \ln(5) - 1 - 1 - e^{-1}$

$k = -\ln(5) - 1$

Donc : $F(x) = G(x) - \ln 5 - 1$.

Correction : 57 p. 212

a) On a : $F = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$.

Donc : $F' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour tout réel x, on a : $F'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$= f(x)$

F est donc bien une primitive de f.

b) Toutes les primitives de f sont donc les fonctions de la forme $G = F + k$.

On cherche celle telle que : $G(-1) = 0$.

Donc : $G(-1) = 0$

$F(-1) + k = 0$

$\sqrt{(-1)^2 + 1} + k = 0$

$\sqrt{2} + k = 0$

$k = -\sqrt{2}$

La primitive de f s'annulant en (- 1) est donc la fonction définie par : $G(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}$.

Correction : 59 p. 212

a) Les primitives de f sur]0 ; + ∞[sont les fonctions F définies pas : $F(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + k$, k réel.

b) Les primitives de f sur]0 ; + ∞[sont les fonctions F définies pas :

$F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 5x + k$, k réel.

Correction : 61 p. 212

a) Les primitives de f sur]0 ; + ∞[sont les fonctions F définies pas : $F(x) = \sin x - \cos x + k$, k réel.

b) Les primitives de f sur]0 ; + ∞[sont les fonctions F définies pas :

$F(x) = 3\sin x + 2\cos x + k$, k réel.

Correction : 62 p. 212

a) Les primitives de f sur]0 ; + ∞[sont les fonctions F définies pas : $F(x) = 5e^x + 4x + k$, k réel.

b) Les primitives de f sur]0 ; + ∞[sont les fonctions F définies pas :

$F(x) = \ln x + e^x - x + k$, k réel.

Correction : 64 p. 212

a) On pose : u(x) = 1 + ln x, soit u′(x) = $\frac{1}{x}$.

Donc : f(x) = $\frac{1}{x} \times$ (ln x + 1), soit f = u′u^1.

Les primitives de f sur ℝ sont donc les fonctions de la forme :

F = $\frac{1}{2}u^2$ + k   k réel

F(x) = $\frac{1}{2}(1 + \ln x)^2$ + k   k réel

b) On pose : u(x) = $x^2 - x + 4$, soit u′(x) = 2x - 1.

Donc : f = 3u′u^5.

Les primitives de f sur]0 ; + ∞[sont donc les fonctions de la forme :

F = $\frac{3}{6}u^6$ + k   k réel

F(x) = $\frac{1}{2}(x^2 - x + 4)^6$ + k   k réel

c) On pose : u(x) = $3e^x + 1$, soit u′(x) = $3e^x$.

Donc : f = $\frac{5}{3}$u′u^2.

Les primitives de f sur ℝ sont donc les fonctions de la forme :

F = $\frac{5}{9}u^3$ + k   k réel

F(x) = $\frac{5}{9}(3e^x + 1)^3$ + k   k réel

Correction : 65 p. 212

a) On pose : u(x) = 1 - e^x > 0 sur]- ∞ ; 0[soit u′(x) = - e^x.

Donc : f(x) = $-\frac{-e^x}{1-e^x}$, soit f = - $\frac{u'}{u}$.

Les primitives de f sur ℝ sont donc les fonctions de la forme :

F = - ln |u| + k   k réel

= - ln u + k   car u > 0 sur]- ∞ ; 0[

F(x) = - ln (1 – e^x) + k   k réel

b) On pose : u(x) = cos x > 0 sur]0 ; $\frac{\pi}{2}$[soit u′(x) = - sin x.

Donc : f(x) = $-\frac{-\sin x}{\cos x}$, soit f = - $\frac{u'}{u}$.

Les primitives de f sur ℝ sont donc les fonctions de la forme :

F = - ln |u| + k   k réel

= - ln u + k   car u > 0 sur]- ∞ ; 0[

F(x) = - ln (cos x) + k   k réel

c) On pose : $u(x) = x^2 + 2x + 3 > 0$ sur $\mathbb{R}$ (discriminant négatif) soit $u'(x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$.

Donc : $f(x) = \frac{1}{2}\frac{2(x+1)}{x^2+2x+3}$, soit $f = \frac{1}{2}\frac{u'}{u}$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme :

$F = \frac{1}{2}\ln|u| + k$ k réel

$= \frac{1}{2}\ln u + k$ car $u > 0$ sur $]-\infty ; 0[$

$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 3) + k$ k réel

Correction : 66 p. 212

a) On pose : $u(x) = -3x + 5$ soit $u'(x) = -3$.

Donc : $f(x) = -\frac{1}{3}3e^{-3x+5}$, soit $f = -\frac{1}{3}u'e^u$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme :

$F = -\frac{1}{3}e^u + k$ k réel

$F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x+5} + k$ k réel

b) On pose : $u(x) = -x^2$ soit $u'(x) = -2x$.

Donc : $f(x) = -\frac{1}{4}(-2x)e^{-x^2}$, soit $f = -\frac{1}{4}u'e^u$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme :

$F = -\frac{1}{4}e^u + k$ k réel

$F(x) = -\frac{1}{4}e^{-x^2} + k$ k réel

Correction : 67 p. 212

a) On pose : $u(x) = x^2 + x + 1$ soit $u'(x) = 2x + 1$.

Donc : $f(x) = 6\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$, soit $f = 6\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme :

$F = 6\sqrt{u} + k$ k réel

$F(x) = 6\sqrt{x^2+x+1} + k$ k réel

b) On pose : $u(x) = \cos x$ soit $u'(x) = -\sin x$.

Donc : $f(x) = -2\frac{-\sin x}{2\cos x}$, soit $f = -\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme :

$F = -2\sqrt{u} + k$ k réel

$F(x) = -2\sqrt{\cos x} + k$ k réel