<u>Correction : 96 p. 27</u>

On considère deux entiers naturels x et y tels que : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5440 \\ \text{PGCD}(x\,;\,y) = 8 \end{cases}$

Il existe deux entiers naturels x' et y' premiers entre eux tels que $x = 8x'$ et $y = 8y'$.

D'où : $64x'^2 - 64y'^2 = 5440$

Donc : $64(x'^2 - y'^2) = 5440$

$x'^2 - y'^2 = 85$

$(x' - y')(x' + y') = 85$

$(x' - y')$ et $(x' + y')$ sont des entiers relatifs.
Donc : $(x' - y')$ et $(x' + y')$ sont des diviseurs de 85.

$(x' + y')$ est un entier naturel, puisque x' et y' sont des entiers naturels.
Le produit $(x' - y')(x' + y')$ doit être un entier naturel (soit 85).
Donc, $(x' - y')$ est un entier naturel.

D'après la question précédente, $(x' - y')$ et $(x' + y')$ sont des diviseurs de 85, et positifs.
Les diviseurs positifs de 85 sont 1, 5, 17 et 85.
De plus : $x' - y' \leq x' + y'$ puisque y' entier naturel.

Donc, on a les différents cas suivants :

$\begin{cases} x' - y' = 1 \\ x' + y' = 85 \end{cases}$ $\begin{cases} x' - y' = 5 \\ x' + y' = 17 \end{cases}$

On additionne les deux équations.

$\begin{cases} 2x' = 86 \\ y' = 85 - x' \end{cases}$ $\begin{cases} 2x' = 22 \\ y' = 17 - x' \end{cases}$

$\begin{cases} x' = 43 \\ y' = 42 \end{cases}$ $\begin{cases} x' = 11 \\ y' = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 8x' = 344 \\ y = 8y' = 336 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8x' = 88 \\ y = 8y' = 48 \end{cases}$

Réciproquement, les couples (344, 336) et (88, 48) vérifient $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5440 \\ \text{PGCD}(x\,;\,y) = 8 \end{cases}$

Donc : S = {(344, 336) ; (88, 48)}.